

Wahrscheinlichkeiten

Wilfried Mann,
Mettmann

Auf der Grundlage von Wahrscheinlichkeiten lassen sich Aussagen über die erhobenen Daten einer Stichprobe auf die zugrundeliegende Grundgesamtheit übertragen (schließende Statistik). Das Teilgebiet, das sich mit zufälligen Ereignissen und der Wahrscheinlichkeitsrechnung befasst, heißt Stochastik.

1. Allgemeine Definition

Die **Wahrscheinlichkeit** (*Probabilität*) ist eine Einstufung von Aussagen und Urteilen nach dem Grad der Gewissheit (Sicherheit). Besondere Bedeutung hat dabei die Gewissheit von Vorhersagen. In der Mathematik hat sich mit der Wahrscheinlichkeitstheorie ein eigenes Fachgebiet entwickelt, das Wahrscheinlichkeiten als mathematische Objekte beschreibt.

2. Zufallsexperiment

Im Labor können Versuche durchgeführt werden, die immer zum gleichen Ergebnis führen, wie Wasser, das immer bei 100 Grad C verdampft. Im Rahmen der Wahrscheinlichkeitsrechnung geht es um Versuche, die nicht vorhersehbar, sondern vom Zufall abhängig sind. Ein Zufallsexperiment ist also ein Versuch mit zufälligem Ausgang. Es wird aber ergänzend so definiert, dass sich das Experiment unter gleichen Bedingungen beliebig wiederholen lässt und alle möglichen Ergebnisse vor Durchführung bekannt sind. Ein typisches Beispiel ist der Münzwurf: Ergebnisse Kopf und Zahl sind bekannt, das Ergebnis ist aber nicht mit Sicherheit vorhersagbar.

Laplace-Experiment

Ein Zufallsexperiment heißt Laplace-Experiment, wenn die Elementarereignisse die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen. Die Laplace-Wahrscheinlichkeit $P(E)$, als historische Grundlage des Wahrscheinlichkeitsbegriffes, wird berechnet

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

Hierbei ist $|E|$ die Anzahl der Ereignisse E und $|\Omega|$ die Anzahl der überhaupt möglichen Ereignisse.

Im Beispiel eines Münzwurfes, mit zwei möglichen Ereignissen, wäre die so zu berechnende Wahrscheinlichkeit $P(\text{Kopf})$ für das Eintreffen »Kopf« $1/2 = 0,5$ oder 50 %. Diese berechnete Wahrscheinlichkeit lässt sich nur anhand von einer sehr großen Zahl tatsächlich durchgeführten Münzwürfen bestätigen und steht somit in engem Zusammenhang mit dem Begriff der relativen Häufigkeit.

Jede Wahrscheinlichkeit P ist eine Zahl zwischen Null und Eins:

$$0 \leq P \leq 1$$

Ein unmögliches Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit Null (0 %), ein sicheres Ergebnis die Wahrscheinlichkeit Eins (100 %).

Galtonbrett

Das Galtonbrett (nach Francis Galton), Abb. 1, besteht aus einer regelmäßigen Anordnung von Hindernissen, an denen eine von oben eingeworfene Kugel jeweils nach links oder rechts abprallen kann. Nach dem Passieren der Hindernisse werden die Kugeln in Fächern aufgefangen, um dort gezählt zu werden. Bei einem symmetrischen Aufbau ist die Wahrscheinlichkeit am ersten Hindernis nach rechts zu fallen $P(\text{rechts}) = 1/2$ und nach links zu fallen $P(\text{links}) = 1/2$. Am nächsten

Hindernis gibt es jeweils zwei Möglichkeiten nach links und rechts zu fallen, jetzt jeweils mit $P = 1/4$, als Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten (vgl. Pfadregel 1).

Verfolgt man den Fall der Kugel, wird deutlich, dass am äußersten Rand der Versuchsanordnung die Wahrscheinlichkeit eine Kugel zu finden sehr gering ist. In der Summe vieler fallender Kugeln bildet sich die Binomialverteilung ab, die im Grenzwert gegen die Normalverteilung konvergiert.

Pfadregeln

Die **Pfadregeln** dienen der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten in einem mehrstufigen Zufallsexperiment. Um diese graphisch darzustellen benutzt man Baumdiagramme.

1. **Pfadregel:** Wenn Wahrscheinlichkeiten mit dem Wort **UND** verknüpft sind, ist die Wahrscheinlichkeit eines **Elementarereignisses** gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten des zugehörigen Pfades.
2. **Pfadregel:** Wenn Wahrscheinlichkeiten mit dem Wort **ODER** verknüpft sind (vgl. Abb.1), ist die Wahrscheinlichkeit eines **Ereignisses** gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Pfade, die zu diesem Ereignis führen.
3. **Pfadregel:** Die Summe der Teilwahrscheinlichkeiten an den Endknoten ist gleich Eins (Totalwahrscheinlichkeitsregel).

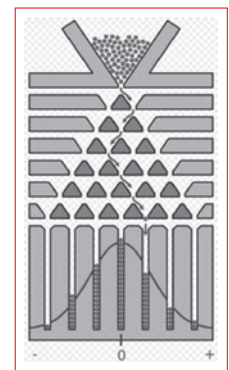


Abb. 1: Modell Galtonbrett
Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Galtonbrett> (01.2019)

3. Anwendung

Wahrscheinlichkeiten finden sich in vielen Alltagsanwendungen wieder. Ein Beispiel ist die Sterbetafel, die u.a. Sterbe- und Überlebenswahrscheinlichkeit von Männern und Frauen in Deutschland angibt.

Bei der Kaufpreisauswertung großer Stichproben werden in der Regel statistische Aussagen zum Erwartungswert mit einer Zufallswahrscheinlichkeit von 95 %, bzw. Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % hinterlegt. Je kleiner die Irrtumswahrscheinlichkeit, desto größer sind die möglichen Abweichungen vom Erwartungswert und umgekehrt. In einer seriösen Datenanalyse wird die unterstellte Wahrscheinlichkeit immer offengelegt.

Voll- ändertes Alter in Jahren	Sterbe- wahrscheinlichkeit www.bfr.bund.de		Überlebens- in Alter x		Gestorbene im Alter x bis unter x+1		Von den Überlebenden im Alter x bis zum Alter x+1 durchlebte Jahre		Durchschnitt- liche Lebens- erwartung im Alter x in Jahren
	q_x	p_x	l_x	l_{x+1}	d_x	l_x	T_x	e_x	
0 ...	0,00308	0,99692	100 000	308	99 734	8 318 492	83,18		
1 ...	0,00033	0,99967	99 492	23	99 466	8 218 758	82,44		
5 ...	0,00009	0,99991	99 436	9	99 431	7 830 132	78,49		
10 ...	0,00006	0,99994	99 401	4	99 398	7 322 038	73,51		
20 ...	0,00019	0,99981	99 479	19	99 470	6 326 513	63,60		
30 ...	0,00031	0,99969	99 378	31	99 262	5 332 455	53,71		
40 ...	0,00070	0,99930	98 856	69	98 821	4 341 726	43,92		
50 ...	0,00199	0,99801	97 744	185	97 452	3 357 748	34,29		
60 ...	0,00535	0,99465	94 455	506	94 401	2 393 315	25,28		
70 ...	0,01267	0,98733	87 410	1 108	86 856	1 478 378	16,91		
80 ...	0,03798	0,96202	71 443	2 713	70 087	673 000	9,42		
90 ...	0,14918	0,85082	31 903	4 772	29 517	135 788	4,26		
100 ...	0,35313	0,64687	1 943	484	1 400	4 091	2,11		

Abb. 2: Sterbetafel
Quelle: Statistisches Bundesamt, Sterbetafel 2015/2017, Methoden- und Ergebnisbericht, S. 13