Theoretische Verteilungen

Wilfried Mann,
Mettmann

Die Form theoretischer oder ausgewählter Zufallsverteilungen wird durch eine allgemein bekannte Funktion beschrieben. Oftmals kann die empirische Verteilung einer Zufallsvariable annähernd durch eine theoretische Verteilung dargestellt werden. Von besonderer Bedeutung für die Statistik ist die Normalverteilung.

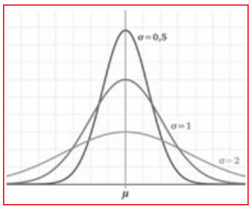
1. Allgemeine Definition

Theoretische (Wahrscheinlichkeits-)Verteilungen sind mathematische Funktionen, die Verteilungen diskreter oder stetiger Zufallsvariablen konkret modellieren. Sie geben an, wie im ideellen Fall die Verteilung eines Merkmals in einer Stichprobe zu erwarten wäre. Mit theoretischen Verteilungen werden statistische Daten weiterverarbeitet und interpretiert.

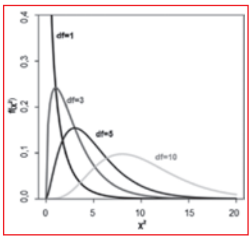
2. Arten theoretischer Verteilungen

Die Statistik kennt eine Vielzahl theoretischer Verteilungen. Diese werden gegliedert in diskrete Verteilungen, z.B. die Binominal- und die Poisson-Verteilung, und stetige Verteilungen, wie die Normal-, χ^2-, t- und F-Verteilung, die hier kurz vorgestellt werden.

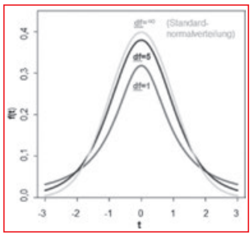
Normalverteilung
Die Bezeichnung Normalverteilung, auch Gauß'sche Verteilung, gilt für viele Verteilungen mit symmetrischem, glockenförmigen Verlauf. Modalwert, Median und arithmetisches Mittel fallen zusammen und die Verteilung nähert sich asymptotisch der X-Achse.
Verteilungsunterschiede liegen in den unterschiedlichen Erwartungswerten (μ) und den Streuungen (σ). Ein Sonderfall ist die Standardnormalverteilung. Hier werden μ = 1 und σ = 1 gesetzt. Sämtliche Normalverteilungen lassen sich transformieren bzw. standardisieren.
Im Intervall der Abweichung +/–1σ von μ sind 68,27 % aller Messwerte zu finden, bei +/–2σ sind dies 95,45 % und bei +/–3σ 99,73 %.



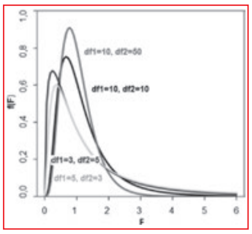
Chi-Quadrat- (χ2-) Verteilung
Diese Verteilung basiert auf der Standardnormalverteilung. Die Zufallsvariable Z wird hierbei quadriert und die Summe der unabhängigen z^2 führt dann zu einer χ^2-Verteilung in Abhängigkeit von der Anzahl der z^2-Variablen oder Freiheitsgrade (df). χ^2-Werte sind immer positiv.



t-Verteilung
Diese Verteilung basiert auch auf der Standardnormalverteilung und der χ^2-Verteilung. Entwickelt wurde die t-Verteilung von Gosset unter dem Pseudonym »Student«, deshalb auch Student-t-Verteilung, die Verteilungen mit unterschiedlichen df angibt.



F-Verteilung
Die F- oder auch Fisher-Verteilung entsteht aus dem Quotienten von zwei unabhängigen χ^2-Verteilungen unter Berücksichtigung der jeweiligen Freiheitsgrade df_1 und df_2. Die F-Werte können nur positiv sein.



Die vier Graphiken stellen die Dichtefunktion der jeweiligen Verteilung dar.

3. Anwendung

Theoretische Verteilungen dienen dem Vergleich mit empirischen Stichproben-Verteilungen und sind somit Grundlagen von statistischen Entscheidungstechniken. Hierzu gehören die statistischen Test- und Prüfverfahren. Letztendlich ist es das Ziel, unter Beachtung von zuvor bestimmten Wahrscheinlichkeiten, den Erwartungswert E(X) = μ und die Streuung σ abzuleiten. Somit wird, ausgehend von den Zufallsdaten einer Stichprobe, der Schluss auf die Grundgesamtheit möglich.

Die **Normalverteilung** hat hierbei wesentliche Bedeutung, da diese bei großen Stichproben häufig auch die empirische Verteilung abbildet. Diese kann als mathematische Basisverteilung angesehen werden und dient in der Fehlertheorie auch zur Beurteilung der Residuen (Rauschen).
Bei der Kaufpreisanalyse kann nur bei sehr großen Stichproben mit Normalverteilung gerechnet werden.

χ^2-, t- und F-Verteilung sind die drei weiteren wichtigen Prüfverteilungen. Sie finden Anwendung z.B. beim:

Mittelwertvergleich (t-Test)
Der klassische t-test (als Zweistichproben-t-Test) setzt voraus, dass beide Stichproben aus Grundgesamtheiten mit gleicher Varianz entstammen. Dieser Test könnte zum Vergleich benachbarter Richtwerte herangezogen werden, führt aber in der Praxis bei zu geringen Fallzahlen nicht zum Ziel.

Vergleich von Häufigkeiten (χ2-Test)
Der χ^2-Test macht eine Aussage darüber, ob die beobachteten Häufigkeiten sich signifikant von denen unterscheiden, die erwartet würden.

Vergleich von Stichprobenvarianzen (F-Test)
Mit Hilfe des F-Tests lassen sich Stichprobenvarianzen miteinander vergleichen. Auch die Überprüfung der Varianzhomogenitäts-Voraussetzungen im Rahmen einer Varianzanalyse ist möglich.